Navie Stokes Equation on R

大田黒 紘之　2015.5.29

1 Scheme

1.1 Basic

球座標系 (r,θ,ϕ) における非圧縮性流れの速度ベクトルを $v(v_r, v_\theta, v_\phi)$ とする.
連続の式及び運動方程式 (Navie Stokes Equation) は以下のように表現できる.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta v_\theta\right) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + R \\ + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{2v_\theta cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_p^2 cot\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \Theta \\ + \nu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2 sin^2\theta} - \frac{2cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi cot\theta}{r} = -\frac{1}{\rho rsin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} + \Phi \\ + \nu\left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 sin^2\theta} + \frac{2}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

ただし,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{5}$$

[1]

[1] R, Θ, Φ は外力を表す項、P は、圧力を示す項、ν は動粘度であり、ρ は密度を示すパラメータである.

1.2 流速予測子 $v^*(v_r^*, v_\theta^*, v_\phi^*)$ の導入

球面座標系におけるナビエ・ストークス方程式を以下のように変形する.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} &= -v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + R \\ &+ \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= -v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_p^2 cot\theta}{r} - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \Theta \\ &+ \nu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 sin^2\theta} - \frac{2cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\phi}{\partial t} &= -v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{rsin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi cot\theta}{r} - \frac{1}{\rho rsin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \Phi \\ &+ \nu\left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 sin^2\theta} + \frac{2}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

以上の式を用いて、タイムステップ n を考慮した流速予測子 $v^*(v_r^*, v_\theta^*, v_\phi^*)$ を定義すると、

$$v_r^{*(n+1)} = v_r^{(n)} + \Delta t\frac{\partial v_r^{(n)}}{\partial t} \tag{9}$$

$$v_\theta^{*(n+1)} = v_\theta^{(n)} + \Delta t\frac{\partial v_\theta^{(n)}}{\partial t} \tag{10}$$

$$v_\phi^{*(n+1)} = v_\phi^{(n)} + \Delta t\frac{\partial v_\phi^{(n)}}{\partial t} \tag{11}$$

タイムステップ n の流速から、タイムステップ n+1 の流速予測子が定義できる

1.3 圧力 P の定義

流速予測子 $v^*(v_r^*, v_\theta^*, v_\phi^*)$ を用いて、圧力 P を以下のように計算する. (連続の式を満たす様な圧力項を探してくる為、物理的な圧力とは若干意味合いが異なる)

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi^{(n+1)} &= -\frac{\nabla\cdot v^{*(n+1)}}{\Delta t}\\ &= -\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r^{*(n+1)}\right) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta v_\theta^{*(n+1)}\right) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial v_\phi^{*(n+1)}}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

$$P^{n+1} = P^n - \phi^{(n+1)} \tag{13}$$

また、以上の ϕ と流速予測子 v^* を用いて、タイムステップ n+1 の流速は以下のように更新できる.

$$v_r^{(n+1)} = v_r^{*(n+1)} + \Delta t\frac{\partial\phi^{(n+1)}}{\partial r} \tag{14}$$

$$v_\theta^{(n+1)} = v_\theta^{*(n+1)} + \Delta t\frac{\partial\phi^{(n+1)}}{\partial\theta} \tag{15}$$

$$v_\phi^{(n+1)} = v_\phi^{*(n+1)} + \Delta t\frac{\partial\phi^{(n+1)}}{\partial\phi} \tag{16}$$

1.4 まとめ

・球面座標系におけるナビエ・ストークス方程式を時間項について解き、時間方向の離散化パラメータ Δt を用いて流速予測子 v^* を計算
・流速予測子 v^* のダイバージェンスから、ϕ を求め次のタイムステップにおける圧力を求める
・ϕ から次のタイムステップにおける流速を求める

1.5 Program

```
#include<iostream>
int main(int argc,char *argv[]){
//Under Constructing
return 0;
}
```