Navie Stokes Equation (2D:Plane)

大田黒 紘之

1 連続の式と運動方程式

連続の式とナビエ・ストークス方程式 (運動方程式)

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla \vec{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \tag{2}$$

解析領域は二次元平面 (x, y) を仮定、流速 $\vec{u}(u, v)$ を成分ごとに展開すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + f_x \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + f_y \tag{5}$$

スキーム導出に必要な式達 (変形した連続の式と合成微分の公式より導いた式)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \tag{6}$$

$$\frac{\partial (u^2)}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} \tag{7}$$

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} \tag{8}$$

以上の式を用いて、ナビエ・ストークス方程式を変形すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}) + f_x \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) + f_y \tag{10}$$

以上の式が得られる. [1] [2] [3]

[1] Re:レイノルズ数
[2] fx: 外力項 (x 方向)
[3] fy: 外力項 (y 方向)

2 流速 u,v について解く

ナビエ・ストークス方程式を変形し、$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}$ について解くと以下の様になる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}) + f_x \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial(v^2)}{\partial y} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) + f_y \tag{12}$$

以上の式を差分表現に置き換える.

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\frac{\partial((u^n)^2)}{\partial x} - \frac{\partial(u^n v^n)}{\partial y} - \frac{\partial p^n}{\partial x} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v^n}{\partial x \partial y}) + f_x^n \tag{13}$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = -\frac{\partial((v^n)^2)}{\partial y} - \frac{\partial(u^n v^n)}{\partial x} - \frac{\partial p^n}{\partial y} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^n}{\partial x \partial y}) + f_y^n \tag{14}$$

時間ステップ n+1 の流速 u,v について解くと,

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(-\frac{\partial((u^n)^2)}{\partial x} - \frac{\partial(u^n v^n)}{\partial y} - \frac{\partial p^n}{\partial x} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v^n}{\partial x \partial y}) + f_x^n \right) \tag{15}$$

$$u^{n+1} = v^n + \Delta t \left(-\frac{\partial((v^n)^2)}{\partial y} - \frac{\partial(u^n v^n)}{\partial x} - \frac{\partial p^n}{\partial y} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^n}{\partial x \partial y}) + f_y^n \right) \tag{16}$$

以上の様な流速 u,v の更新式が得られる. ただし, 圧力については後述する式によって求める必要がある.

3 圧力について解く

変形したナビエ・ストークス方程式を、それぞれ x,y 方向に偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2(u^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2(v^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \tag{18}$$

以上の様な式が得られる。これらの式を足し合わせると、

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{\partial^2(u^2)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(v^2)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2(uv)}{\partial x \partial y} \tag{19}$$

以上のような圧力に関するラプラス方程式が得られる。この式を解くことによって、流速 u,v から圧力 p を求める事が可能である.

4　境界条件について

ここまでの議論で、流速 u,v 及び圧力 p についての時間発展が計算可能であるが, 実際の問題適用には境界条件が必要となる. この境界条件を流速 u,v 及び圧力 p に対して適切に課す必要性がある. 不適切な境界条件を課した場合、計算結果が発散する可能性があるので注意する必要性がある.

4.1　キャビティ問題

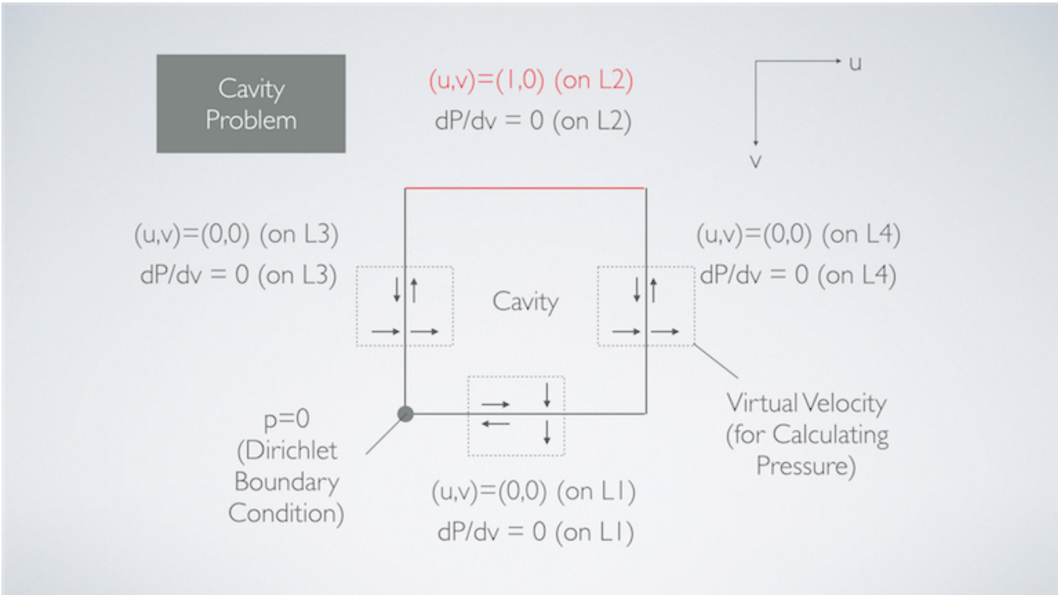

Fig 1 二次元キャビティ問題における境界条件

以上にキャビティ問題 (流路にへこみが存在する様な問題) における境界条件の一例を示した。壁 (Wall) では、流速 u,v が共に 0、圧力勾配 $\frac{\partial P}{\partial n}$ が 0 となるような境界条件を付加する必要性がある. 壁上の圧力を計算する際に壁の外側の流速は存在しない為、計算ができなくなる. 壁の外側の流速を 0 とすると不都合が生じる為、一般には壁の内側の流速を用いる事で計算を行っている. (ただし、壁に平行な壁の外側の流速を考える時に、壁の内側の流速の符号を反転させる必要がある。垂直な流れに関しては符号反転の必要はない)

5　計算の流れについて

1. 流速 u,v、圧力 p の初期化 (初期値定義)
2. 現在の流速 u,v の更新式から次のステップの流速を求める
3. 現在の流速 u,v から次のステップの圧力 p を求める
4. 繰り返し

6　計算プログラムについて

執筆中

7　計算結果の例

執筆中